MATHÉMATIQUES

Groupe E/S

DURÉE : 4 heures

PRÉLIMINAIRE

Si S est une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et si n est un entier naturel on notera $f_S(n)$ le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme de deux éléments de S, c'est-à-dire le nombre de paires $\{k, l\}$ d'éléments de S telles que $n = k + l$. On posera $f_S(n) = 0$ s'il est impossible d'écrire n comme une telle somme.

Le but du problème est de montrer qu'il existe une partie S de $\mathbb{N}$ telle que $f_S(n)$ soit non nul mais « petit » pour n assez grand.

Plus précisément on veut vérifier le théorème suivant :

Il existe une partie S de $\mathbb{N}$, deux constantes positives non nulles C_1 et C_2 et un entier p tels que pour tout entier $n \geqslant p$, on ait : $C_1 \ln(n) \leqslant f_S(n) \leqslant C_2 \ln(n)$.

La première partie du problème est une question préliminaire d'analyse. La seconde partie est une étude probabiliste d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Ces deux parties sont **indépendantes**. La troisième partie aboutit au théorème en utilisant les résultats des deux premières.

On rappelle les notations suivantes :

- $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- $\exp(x)$ désigne l'exponentielle du nombre réel x.
- $\ln(x)$ désigne le logarithme néperien de x.

On rappelle que $\ln(2) > 0{,}69$.

PARTIE I

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier k compris entre 1 et $n - 1$ on pose :

$$a(n, k) = \sqrt{\frac{\ln(k)\ln(n-k)}{k(n-k)}}$$

et

$$m_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} a(n, k).$$

Le but de cette partie est de trouver un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de la suite de terme général m_n.

Question 1. Pour $u \in]0, 1[$ on pose $f(u) = (u(1-u))^{-\frac{1}{2}}$.

a. Étudiez les variations de la fonction f.

b. L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(u)\,du$ converge-t-elle ? Si oui donnez sa valeur.

c. Soit k un entier strictement inférieur à $\left[\frac{n}{2}\right]$,

montrez que $n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(u)\,du$.

Question 2.

a. Montrez que : $n\, m_n \leqslant \ln(n) \sum_{k=2}^{[\frac{n}{2}]-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b. En déduire que : $m_n \leqslant \ln(n) \int_0^{\frac{1}{2}} f(u)\, du$.

Question 3.

a. Construisez une suite d'entiers c_n tels que la suite de terme général $\frac{\ln(c_n)}{\ln(n)}$ converge vers 1 et la suite de terme général $\frac{c_n}{n}$ converge vers 0.

b. Montrez que la suite $s_n = \sum_{k=c_n}^{[\frac{n}{2}]-1} a(n, k)$ est définie pour n assez grand. Montrez qu'il existe une suite u_n, convergente et de limite 1, telle que, lorsque n est assez grand,

$$s_n \geqslant u_n \ln(n) \int_{\frac{c_n}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} f(u)\, du.$$

c. Donnez un équivalent de la suite de terme général m_n lorsque n tend vers l'infini.

PARTIE II

On considère une suite $(p_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de l'intervalle $[0, 1]$.

On considère d'autre part un espace de probabilités (Ω, A, P) et une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geqslant 1}$ définies sur Ω à valeurs dans $\{0, 1\}$ et de loi :

$$P(X_k = 1) = p_k \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = 1 - p_k.$$

(On admettra l'existence d'un tel espace de probabilités et d'une telle suite de variables aléatoires.)

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier k compris entre 1 et $n - 1$ on pose :

$$Y_{n,k} = X_k X_{n-k} \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]-1} Y_{n,k}.$$

Question 1. Soit n un entier $\geqslant 2$ et k un entier compris entre 1 et $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_{n,k}$?

b. Quelle est son espérance ?

c. Pour tout réel $\lambda > 0$, calculez $E[\exp(\lambda Y_{n,k})]$.

d. Montrez que pour tout réel $\lambda > 0$

$$E[\exp(\lambda Y_{n,k})] \leqslant \exp(p_k p_{n-k}(\exp(\lambda) - 1)).$$

Question 2.

a. Quelle est l'espérance de Z_n ?

b. Pour tout réel $\lambda > 0$, donnez une majoration de $E[\exp(\lambda Z_n)]$.

c. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, et tout réel $\lambda > 0$

$P\{Z_n - E(Z_n) \geqslant \varepsilon E(Z_n)\} \leqslant \exp(E(Z_n)(\exp(\lambda) - 1 - (1 + \varepsilon)\lambda))$.

(On pourra considérer la variable aléatoire $\exp(\lambda Z_n)$).

Question 3.

a. Si ε est fixé dans l'intervalle $]0, 1[$, pour quelle valeur de λ la majoration du 2.*c.* est-elle optimale ?

b. Montrez que, si ε est assez proche de 1, alors, pour tout $n \geqslant 1$:

$$P\{Z_n - E(Z_n) \geqslant \varepsilon E(Z_n)\} \leqslant \exp(-c E(Z_n))$$

avec $c = 0{,}38$.

Question 4. Montrez que, si ε est assez proche de 1, alors, pour tout n :

$$P\{Z_n - E(Z_n) \leqslant -\varepsilon E(Z_n)\} \leqslant \exp(-d E(Z_n))$$

avec $d = 0{,}99$.

(On pourra reprendre et adapter la méthode utilisée aux questions 2 et 3.)

PARTIE III

On utilise dans cette partie les notations et les résultats des deux parties précédentes. On considère ici le cas où les nombres p_k de la partie II valent :

$$p_k = \sqrt{\frac{2 \ln(k)}{k}}.$$

Question 1. Montrez que, pour tout $k \geqslant 1$, p_k est compris entre 0 et 1, et donc que le choix de ces valeurs pour p_k est possible.

Question 2. Montrez qu'il existe un réel $a > 1$ tel que, si ε est assez proche de 1, et si n est assez grand :

$$P\left\{(1 - \varepsilon) \leqslant \frac{Z_n}{E(Z_n)} \leqslant (1 + \varepsilon)\right\} \geqslant 1 - n^{-a}.$$

Question 3. En déduire que, si ε est assez proche de 1, et si l'entier p est assez grand, la probabilité de l'événement $C_{p,\varepsilon} = \left\{\forall n \geqslant p;\ (1 - \varepsilon) \leqslant \frac{Z_n}{E(Z_n)} \leqslant (1 + \varepsilon)\right\}$ est non nulle.

Question 4. Pour tout élément ω de l'espace de probabilités Ω, on considère la partie $S(\omega)$ de $\mathbb{N}$ constituée des entiers k tels que $X_k(\omega) = 1$.

Trouvez une relation entre $f_{S(\omega)}(n)$ et $Z_n(\omega)$.

Prouvez le théorème énoncé dans le préliminaire.